29/11/2018

## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ:

Έστω $f: A \to B$ $X, Y \subseteq B$

(α) Αν $X \subseteq Y$ τότε $f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y)$

(β) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

(γ) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

(δ) $f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$ → Ειδικότερα, για $X = B$ προκύπτει

$f^{-1}(B \setminus Y) = A \setminus f^{-1}(Y)$ δηλ. $f^{-1}(Y^c) = [f^{-1}(Y)]^c$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(α) Υποθέτουμε ότι $X \subseteq Y$. Αν $x \in f^{-1}(X)$ τότε $f(x) \in X$ άρα (αφού $X \subseteq Y$) $f(x) \in Y$ άρα $x \in f^{-1}(Y)$. Συνεπώς $f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y)$

(β) $x \in f^{-1}(X \cap Y) \Leftrightarrow f(x) \in X \cap Y \Leftrightarrow f(x) \in X$ και $f(x) \in Y$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(X)$ και $x \in f^{-1}(Y)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

Αποδείξαμε ότι $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

(γ) $x \in f^{-1}(X \cup Y) \Leftrightarrow f(x) \in X \cup Y \Leftrightarrow f(x) \in X$ ή $f(x) \in Y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(X)$ ή $x \in f^{-1}(Y)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

(δ) $x \in f^{-1}(X \setminus Y) \Leftrightarrow f(x) \in X \setminus Y \Leftrightarrow f(x) \in X$ και $f(x) \notin Y \Leftrightarrow$

$x \in f^{-1}(X)$ και $x \notin f^{-1}(Y) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$.

Επομένως $f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$.

## Θεώρημα:

Έστω $f: A \to B$ μια 1-1 συνάρτηση. Τότε για κάθε $X \subseteq A$, $Y \subseteq A$ ισχύει $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

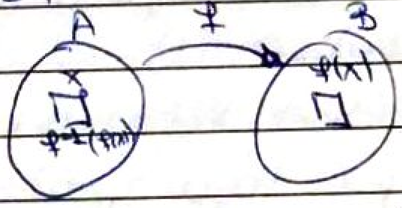
**Απόδειξη:** Είπαμε δείξει ότι ισχύει $\boxed{f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)}$ (1) (γενικά χωρίς την υπόθεση ότι η $f$ είναι 1-1)

Δείχνουμε τώρα ότι $\boxed{f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)}$ (2). Έστω $y \in f(X) \cap f(Y) \Rightarrow$ $y \in f(X)$ και $y \in f(Y)$. Άρα υπάρχουν $x_1 \in X$ ώστε $y = f(x_1)$ και $x_2 \in Y$ ώστε $y = f(x_2)$. Έχουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ και εφόσον η $f$ είναι 1-1 προκύπτει ότι $x_1 = x_2$. Θέτουμε $x = x_1 = x_2$ τότε $x = x_1 \in X$ και $x = x_2 \in Y$ δηλ. $x \in X \cap Y$. Εφόσον $y = f(x)$ προκύπτει ότι $y \in f(X \cap Y)$. Άρα $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$.

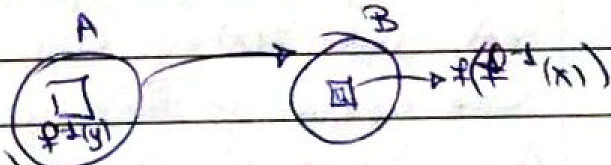
(1), (2) $\Rightarrow f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

## Πρόταση:

Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση.
Τότε
(i) Για κάθε $X \subseteq A$ ισχύει $X \subseteq f^{-1}(f(X))$
(ii) Για κάθε $Y \subseteq B$ ισχύει $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$




**Απόδειξη:**
(i) Έστω $x \in X$ τότε $f(x) \in f(X)$ άρα $x \in f^{-1}(f(X))$ άρα $X \subseteq f^{-1}(f(X))$




(ii) Έστω $y \in f(f^{-1}(Y))$. Τότε υπάρχει $x \in f^{-1}(Y)$ ώστε $y = f(x)$. Εφόσον $x \in f^{-1}(Y)$ έχουμε $f(x) \in Y$ δηλ. $y \in Y$. Επομένως $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

**Πρόταση:** Έστω $f: A \to B$
Αν η $f$ είναι 1-1 τότε για κάθε $X \subseteq A$ ισχύει $X = f^{-1}(f(X))$

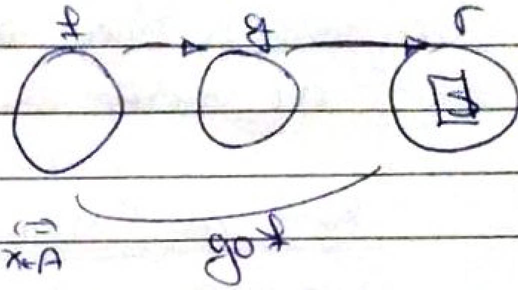
**Απόδειξη:** Έστω $X \subseteq A$
Στο προηγούμενο αποδείξαμε ότι $\boxed{X \subseteq f^{-1}(f(X))}$ (1) Αρκεί να δ.ο. $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$.
Έστω $x \in f^{-1}(f(X))$. Τότε $f(x) \in f(X)$. Άρα υπάρχει $x_1 \in X$ ώστε $f(x) = f(x_1)$. Εφόσον η $f$ είναι 1-1 προκύπτει ότι $x = x_1$.
Εφόσον $x_1 \in X$ συμπεραίνουμε ότι $x \in X$.
Συνεπώς, $\boxed{f^{-1}(f(X)) \subseteq X}$ (2)
(1) (2) $\Rightarrow X = f^{-1}(f(X))$

**Πρόταση:** Έστω $f: A \to B$. Αν η $f$ είναι επί τότε για κάθε $Y \subseteq B$ ισχύει ότι $f(f^{-1}(Y)) = Y$

**Απόδειξη:**
Έστω $Y \subseteq B$ είπαμε απόδειξη ότι $(x)$ άρα $x \in f^{-1}(f(x))$
$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ (1)
δ.δ.ο. $Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$ (2)
Έστω $y \in Y$ (άρα $y \in B$). Εφόσον η $f$ είναι επί υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x) = y$. Έτσι $f(x) = y \in Y$ άρα $x \in f^{-1}(Y)$
Έτσι εφόσον $y = f(x)$ με $x \in f^{-1}(y)$ θα έχουμε $y \in f(f^{-1}(y))$.
Άρα $Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$
(1), (2) $\Rightarrow f(f^{-1}(y)) = Y$

## Άσκηση

Έστω $f: A \to B$, $g: B \to \Gamma$ δυο συναρτήσεις. Ν.δ.ο. $\forall S \subseteq \Gamma$ ισχύει $(g\circ f)^{-1}(S) = f^{-1}(g^{-1}(S))$




**Λύση:** Για τυχαίο $x$

$x \in (g\circ f)^{-1}(S) \iff (g\circ f)(x) \in S \iff g(f(x)) \in S \underset{x\in A}{\iff}$
$f(x) \in g^{-1}(S) \iff x \in f^{-1}(g^{-1}(S))$

Επομένως $(g\circ f)^{-1}(S) = f^{-1}(g^{-1}(S))$

## Οικογένειες (Ειδικότερα Οικογένειες Συνόλων)

Αν $I$ είναι σύνολο (σύνολο δεικτών) και $\alpha$ μια συνάρτηση $\alpha: I \to E$ (όπου $E$ κάποιο σύνολο) το σύνολο τιμών της $\alpha$ πολλές φορές το ονομάζουμε οικογένεια στο $E$. Συνήθως αντί για το σύμβολο $\alpha(i)$ χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\alpha_i$.

Έτσι αναφερόμαστε στην οικογένεια $(\alpha_i)_{i\in I}$ ή $\{\alpha_i : i \in I\}$ (ή $\alpha_i, i\in I$).

→ Έτσι όταν έχουμε μια ακολουθία (πχ ακολουθία πραγματικών αριθμών) μιλάμε για την ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αντί να την πούμε $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

→ Ειδικότερα μας ενδιαφέρουν οικογένειες σε ένα σύνολο συνόλων. Δηλαδή οικογένειες $(A_i)_{i\in I}$ όπου κάθε $A_i$ είναι σύνολο.

**Ορισμός:** Έστω $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια συνόλων

(i) Συμβολίζουμε με $\bigcup_{i\in I} A_i$ και καλούμε ένωση της οικογένειας $(A_i)_{i\in I}$ το σύνολο που περιέχει ακριβώς όλα τα στοιχεία των συνόλων $A_i$, $i \in I$ έτσι $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : \exists i \in I,\ x \in A_i\}$

(ii) Συμβολίζουμε με $\bigcap_{i\in I} A_i$ και καλούμε τομή της οικογένειας $(A_i)_{i\in I}$ το σύνολο που περιέχει τα κοινά στοιχεία των συνόλων $A_i$, $i\in I$

$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : \forall i \in I\ x \in A_i\}$

**Παρατηρηση.** Αν $C$ μια συλλογη συνόλων, μπορεί να θεωρηθεί ως οικογενεια συνόλων οπου το συνολο δεικτων ειναι το ιδιο το $C$, δηλ. $\{A, A \in C\}$ $\bigcup C = \bigcup A, A \in C$ και $\bigcap C = \bigcap A, A \in C$.

## Καρτεσιανα Γινομενα

Για δυο συνολα $A, B$ το $A \times B$ (καρτεσιανό γινόμενο των $A, B$) περιεχει ακριβως τα διατεταγμενα ζευγη $(a, b)$ με $a \in A$, $b \in B$. Ο ορισμός αυτος επεκτεινεται για πεπερασμενο αριθμό συνόλων $A_1, A_2, \ldots A_n$. Το $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ειναι το συνολο των διατεταγμενων ν-αδων $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ $a_i \in A$ για $i = 1, \ldots n$ δηλ. $f: I \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ οπου για καθε $i \in I = \{1, \ldots n\}$ οπου για καθε $i \in I$ απεικονιζεται στο $a_i \in A_i$.